1.1.21 Řešení příkladů na rovnoměrně zrychlený pohyb III

Předpoklady: 010120

Pedagogická poznámka: Tato hodina má smysl pouze v případě, že učíte žáky buď matematicky mimořádně schopné nebo žáky vyučované podle sesterské učebnice matematiky, kde jsou kvadratické rovnice zařazeny (ukázkově) hned na počátku. Klasicky vyučovaní žáci kvadratické rovnice probírají až na jaře a proto řešit kvadratické rovnice ve fyzice před tím znamená ztrátu minimálně jedné hodiny, což nedoporučuji.

Př. 1: Urči, za jak dlouho spadne z výšky 1,56 m nafukovací míč, pokud padá se zrychlením $5{,}8\,\mathrm{m/s^2}$.

$v_0 = 0$, $a = 5{,}8\,\mathrm{m/s^2}$, $s = 1{,}56\,\mathrm{m}$, $t = ?$

Z rovnice pro dráhu rovnoměrně zrychleného pohybu vyjádříme čas.

$$s = v_0 t + \frac{1}{2}at^2 = 0 \cdot t + \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}at^2$$

$$2s = at^2$$

$$t^2 = \frac{2s}{a}$$

$$t = \sqrt{\frac{2s}{a}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1{,}56}{5{,}8}}\,\mathrm{s} = 0{,}73\,\mathrm{s}$$

Míč spadne za 0,73 s (což přesně odpovídá naměřeným hodnotám).

Př. 2: Padající nafukovací míč získal během 0,3 s rychlost 1,8 m/s. Za jak dlouho získá rychlost 3 m/s? Předpokládej rovnoměrně zrychlený pohyb.

$t_1 = 0{,}3\,\mathrm{s}$ $v_1 = 1{,}8\,\mathrm{m/s}$ $v_2 = 3\,\mathrm{m/s}$ $t = ?$

Míč se pohyboval rovnoměrně zrychleně s nulovou počáteční rychlostí.
Pro oba okamžiky platí rovnice pro rychlost rovnoměrně zrychleného pohybu:

$v_1 = at_1$ $v_2 = at_2$

Po celou dobu se pohybuje se stejným zrychlením. Z první rovnice můžeme zrychlení vypočítat a dosadit do druhé.

$$v_1 = at_1 \quad / : t_1$$

$$a = \frac{v_1}{t_1} = \frac{1{,}8}{0{,}3}\,\mathrm{m/s^2} = 6\,\mathrm{m/s^2}$$

$$v_2 = at_2 \quad / : a$$

$$t_2 = \frac{v_2}{a} = \frac{3}{6}\,\mathrm{s} = 0{,}5\,\mathrm{s}$$

Padající míč získá rychlost 3 m/s za 0,5 s.

Dodatek: Příklad je možné počítat i obecně: $v_1 = at_1 \Rightarrow a = \frac{v_1}{t_1}$ dosadíme do druhé rovnice $v_2 = at_2 = \frac{v_1}{t_1} t_2 \;\Rightarrow\; \frac{v_2}{v_1} t_1 = t_2$. Výsledek tak získáme bez výpočtu hodnoty zrychlení.
Další možností je přímá úměrnost. S tou je však třeba zacházet opatrně, protože někteří žáci ji pak používají i u příkladů s nenulovou počáteční rychlostí.

Př. 3: Auto během zrychlování z počáteční rychlost 50 km/h se zrychlením $2\,\mathrm{m/s^2}$ urazilo dráhu 100 m. Jak dlouho auto zrychlovalo? Jaké rychlosti dosáhlo?

$v_0 = 50\,\mathrm{km/h} = 13{,}9\,\mathrm{m/s}$, $s = 100\,\mathrm{m}$, $a = 2\,\mathrm{m/s^2}$, $t = ?$, $v = ?$
Auto se pohybuje s nenulovou počáteční rychlostí $\Rightarrow$ musíme použít kompletní sadu rovnic:
$v = v_0 + at$ 2 neznámé veličiny v rovnici
$s = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$ jedna neznámá veličina v rovnici $\Rightarrow$ můžeme ihned počítat čas
rovnice je pro čas kvadratická $\Rightarrow$ nepůjde vyjádřit, rovnou dosadíme a vypočteme pomocí vzorce pro kvadratickou rovnici
$s = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \;\Rightarrow\; 100 = 13{,}9t + \frac{1}{2} 2t^2$
$t^2 + 13{,}9t - 100 = 0$
$$t_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-13{,}9 \pm \sqrt{13{,}9^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-100)}}{2 \cdot 1} = \frac{-13{,}9 \pm 24{,}3}{2}$$
$t_1 = \frac{-13{,}9 + 24{,}3}{2} = 5{,}2\,\mathrm{s}$ $t_2 = \frac{-13{,}9 - 24{,}3}{2} = -19{,}1\,\mathrm{s}$ - nemá smysl
Nyní můžeme dopočítat dosaženou rychlost:
$v = v_0 + at = 13{,}9 + 2 \cdot 5{,}2\,\mathrm{m/s} = 24{,}3\,\mathrm{m/s} = 87{,}5\,\mathrm{km/h}$
Auto zrychlovalo 5,2 a dosáhlo rychlosti 87,5 km/h.

Př. 4: Urči dobu, za kterou vystoupal do výšky 4 m kámen hozený kolmo vzhůru rychlostí 10 m/s. Kámen se pohyboval kvůli přitažlivosti Země se zrychlením $10\,\mathrm{m/s^2}$.

$v_0 = 10\,\mathrm{m/s}$, $s = 4\,\mathrm{m}$, $a = -10\,\mathrm{m/s^2}$ (Země rychlost kamene zmenšuje), $t = ?$
Kámen se pohybuje s nenulovou počáteční rychlostí $\Rightarrow$ musíme použít kompletní sadu rovnic:
$v = v_0 + at$ 2 neznámé veličiny v rovnici, rychlost nás ani nezajímá
$s = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$ jedna neznámá veličina v rovnici $\Rightarrow$ můžeme ihned počítat čas
rovnice je pro čas kvadratická $\Rightarrow$ nepůjde vyjádřit, rovnou dosadíme a vypočteme pomocí vzorce pro kvadratickou rovnici
$s = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \;\Rightarrow\; 4 = 10t + \frac{1}{2}(-10)t^2$
$5t^2 - 10t + 4 = 0$

$$t_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-(-10)\pm\sqrt{(-10)^2-4\cdot5\cdot4}}{2\cdot5}=\frac{10\pm4,5}{10}$$

$t_1=\frac{10+4,5}{10}=1,5\,\text{s}$ $\qquad$ $t_2=\frac{10-4,5}{10}=0,6\,\text{s}$

Smysl mají oba kořeny, kámen dosáhne výšky 4 m během sloupání a poté ještě jednou až bude padat dolů.

Kámen vystoupá do výšky 4 m přibližně za 0,6 s, ve stejné výšce se pak objeví ještě během pádu 1,5 sekundy od vyhození.

Př. 5: Kluk hodil kolmo dolů z ochozu věže vysoké 30 m rychlostí 8 m/s kámen. Za jak dlouho dopadne na zem. Kámen se pohybuje se zrychlením $10\,\text{m/s}^2$.

$v_0=8\,\text{m/s}$, $s=30\,\text{m}$, $a=10\,\text{m/s}^2$ (Země rychlost kamene zvětšuje), $t=?$

Kámen se pohybuje s nenulovou počáteční rychlostí $\Rightarrow$ musíme použít kompletní sadu rovnic:

$v=v_0+at$ 2 neznámé veličiny v rovnici, rychlost nás ani nezajímá.

$s=v_0t+\frac{1}{2}at^2$ jedna neznámá veličina v rovnici $\Rightarrow$ můžeme ihned počítat čas.

Rovnice je pro čas kvadratická $\Rightarrow$ nepůjde vyjádřit, rovnou dosadíme a vypočteme pomocí vzorce pro kvadratickou rovnici.

$$s=v_0t+\frac{1}{2}at^2 \Rightarrow 30=8t+\frac{1}{2}\cdot10t^2$$

$$5t^2+8t-30=0$$

$$t_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-8\pm\sqrt{8^2-4\cdot5\cdot(-30)}}{2\cdot5}=\frac{-8\pm25,8}{10}$$

$t_1=\frac{-8+25,8}{10}=1,78\,\text{s}$ $\qquad$ $t_2=\frac{-8-25,8}{10}=-3,38\,\text{s}$

Kámen dopadne na zem za 1,78 sekundy.

Dodatek: Význam má i druhý kořen -3,38 s. Rovnice popisuje pohyb kamene i v okamžicích před hodem (v záporných časech). Pokud bychom kámen v čase -3,38 s hodili ze země rychlostí $v=v_0+at=8+10(-3,38)\,\text{m/s}=-25,8\,\text{m/s}$ (tedy kolmo vzhůru), vystoupal by během letu nahoru, dosáhl by nejvyšší výšky, začal by padat dolů, v čase 0 s by minul ochoz věže rychlostí 8 m/s (byl by ve stejném stavu jako kdybychom ho v čase 0 s teprve vyhodili), pokračoval by v pádu a v čase 1,78 s by dopadl na zem.

Shrnutí: Pokud se veličina, kterou chceme vypočítat ve vzorci vyskytuje v první i druhé mocnině, nemůžeme ji vyjádřit, ale musíme dosadit a vypočítat ji pomocí vzorce pro kvadratickou rovnici.